作用積分の最小化問題とオイラー・ラグランジュ方程式

平成 30 年 12 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

実ヒルベルト空間の直積空間に於けるラグランジュ力学を、作用積分の最小化問題として定式化し、その最小化を実現する経路の存在に就いて議論しよう。

１．作用積分の最小化問題

ラグランジュ力学を実ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の直積空間 $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ で定式化しよう。即ち、配位空間 configuration space として実ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ を設定し、配位空間 $\mathscr{H}$ の各点 q に於ける接空間 $\{q\} \times \mathscr{H}$ を運動量空間 momentum space とし、それらの成す接束 tangent bundle $T\mathscr{H}$ を直積空間 $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ と同一視して、ラグランジュ力学を $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ 上に定式化しよう。

接束 $T\mathscr{H} = \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ 上の C^1 級実数値函数を**ラグランジュ函数** Lagrangean と定義する。ラグランジュ函数 $L \in C^1(\mathscr{H} \times \mathscr{H};\ \mathbb{R})$ に対し、$t_0 < t_1$ なる二つの実数の組 (t_0, t_1) を与え、初期時刻 t_0 から終期時刻 t_1 に至る $\mathscr{H}$ 内の経路 path $\gamma \in C^1([t_0, t_1];\ \mathscr{H})$ に対する**作用積分** action $I(\gamma)$ を

$$I(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\right) dt$$

で定義する。ここに $\dot{\gamma}$ は γ の導函数を表す。

経路全体の成す空間 $C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right)$ は各点に於ける加法とスカラー倍から導かれる加法とスカラー倍：

$$\begin{aligned}
&(\gamma_1 + \gamma_2)(t) := \gamma_1(t) + \gamma_2(t), && t \in [t_0, t_1],\ \gamma_1, \gamma_2 \in C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right) \\
&(a\gamma)(t) := a\gamma(t), && t \in [t_0, t_1],\ a \in \mathbb{R}, \gamma \in C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right)
\end{aligned}$$

に拠ってベクトル空間となり

$$\|\gamma\|_{C^1([t_0,t_1];\ \mathscr{H})} := \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left(\|\gamma(t)\| + \|\dot{\gamma}(t)\|\right)$$

に拠って与えられるノルムでバナハ空間となる。ここに $\|\cdot\|$ は $\mathscr{H}$ の内積 $(\cdot|\cdot)$ から導かれるノルム $\|\cdot\| = (\cdot|\cdot)^{1/2}$ とする。これより $I : \gamma \mapsto I(\gamma)$ はバナハ空間 $C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right)$ 上の実数値函数として定まる。

命題１．　バナハ空間 $C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right)$ 上の実数値函数

$$I : C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right) \ni \gamma \mapsto I(\gamma) \in \mathbb{R}$$

は C^1 級であり、任意の $\xi \in C^1([t_0, t_1];\ \mathscr{H})$ に対し、等式

$$I'(\gamma)\xi = \int_{t_0}^{t_1} \left(\partial_1 L(\gamma, \dot{\gamma})\xi + \partial_2 L(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\xi}\right)$$

が成立つ。

(証明)　任意に $\gamma \in C^1([t_0, t_1];\ \mathscr{H})$ を一つ取る。先ず I が γ に於いて連続である事を示そう。$C^1([t_0, t_1];\ \mathscr{H})$ に於いて γ に収束する任意の点列 (γ_n) に対し $I(\gamma_n) \to I(\gamma)$ となる事を示せば充分であるが、これは L の連続性より導かれる各点 $t \in [t_0, t_1]$ に対する各点収束 $L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) \to L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ $(n \to \infty)$ 及び $\sup_{n \geq 1} \|\gamma_n\|_{C^1([t_0,t_1];\ \mathscr{H})} < \infty$ より導かれる一様有界性 $\sup_{n \geq 1} \sup_{t \in [t_0, t_1]} |L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t))| < \infty$ に基づく有界収束定理の適用に拠り直ちに従う。次に $I \in C^1(C^1([t_0, t_1];\ \mathscr{H});\ \mathbb{R})$ なる事を示そう。$L \in C^1(\mathscr{H} \times \mathscr{H};\ \mathbb{R})$ なる事より各 $(x, v) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ に対し $R_{(x,v)} \in C(\mathscr{H} \times \mathscr{H};\ \mathbb{R})$ が存在し任意の $(h, k) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ に対し、等式

$$\begin{aligned}
&L(x+h, v+k) - L(x, v) - \partial_1 L(x, v)h - \partial_2 L(x, v)k = R_{(x,v)}(h, k)(\|h\|^2 + \|k\|^2)^{1/2}, \\
&R_{(x,v)}(h, k) \to 0 \ ((\|h\|^2 + \|k\|^2)^{1/2} \to 0)
\end{aligned}$$

且つ $R : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \times \mathscr{H} \times \mathscr{H} \ni (x, v, h, k) \mapsto R_{(x,v)}(h, k) \in \mathbb{R}$ の連続性が従う。このとき任意の $\xi \in C^1([T_0, t_1];\ \mathscr{H})$ に対し

$$\begin{aligned}
&I(\gamma + \xi) - I(\gamma) - \int_{t_0}^{t_1} \left(\partial_1 L(\gamma, \dot{\gamma})\xi + \partial_2 L(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\xi}\right) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left(L(\gamma + \xi, \dot{\gamma} + \dot{\xi}) - L(\gamma, \dot{\gamma}) - \partial_1 L(\gamma, \dot{\gamma})\xi - \partial_2 L(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\xi}\right) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} R_{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}\left(\xi(t), \dot{\xi}(t)\right)\left(\|\xi(t)\|^2 + \|\dot{\xi}(t)\|^2\right)^{1/2} dt
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
&\left|I(\gamma + \xi) - I(\gamma) - \int_{t_0}^{t_1} \left(\partial_1 L(\gamma, \dot{\gamma})\xi + \partial_2 L(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\xi}\right)\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t_1} \left|R_{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}\left(\xi(t), \dot{\xi}(t)\right)\right| dt \|\xi\|_{C^1([t_0,t_1];\ \mathscr{H})}
\end{aligned}$$

が導かれるので $\|\xi\|_{C^1([t_0,t_1];\ \mathscr{H})} \to 0$ なる時

$$\int_{t_0}^{t} \left|R_{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}\left(\xi(t), \dot{\xi}(t)\right)\right| dt \to 0$$

を示せば充分である。任意に $\varepsilon > 0$ を与える。各 $t \in [t_0, t_1]$ に対し $\delta_t(\varepsilon) > 0$ が存在し $(\|h\|^2 + \|k\|^2)^{1/2} < \delta_t(\varepsilon)$ なる任意の $(h, k) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ に対し $\left|R_{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}(h, k)\right| < \varepsilon$ が成立つ。函数

$$[t_0, t_1] \times \mathscr{H} \times \mathscr{H} \ni (t, h, k) \longmapsto R_{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))}(h, k) \in \mathbb{R}$$

の連続性より各 $t \in [t_0, t_1]$ に対し $\eta_t(\varepsilon) > 0$ が存在し $U_t(\varepsilon) := (t - \eta_t(\varepsilon),\ t + \eta_t(\varepsilon)) \cap [t_0, t_1]$ の任意の点 s 及び $(\|h\|^2 + \|k\|^2)^{1/2} < \eta_t(\varepsilon)$ なる任意の $(h, k) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ に対し $\left|R_{(\gamma(s),\dot{\gamma}(s))}(h,k)\right| < \varepsilon$ が成立つ。$(U_t(\varepsilon);\ t \in [t_0, t_1])$ は $[t_0, t_1]$ の開被覆となるので有限部分被覆 $\left(U_{\tau_j}(\varepsilon);\ \tau_j \in [t_0, t_1],\ 1 \leq j \leq m\right)$ を持つ。そこで $\eta(\varepsilon) = \min\limits_{1 \leq j \leq m} \eta_{\tau_j}(\varepsilon)$ と置く。このとき $(\|h\|^2 + \|k\|^2)^{1/2} < \eta(\varepsilon)$ なる任意の $(h, k) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ に対し

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left|R_{(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))}(h,k)\right| = \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{t \in U_{\tau_j}(\varepsilon)} \left|R_{(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))}(h,k)\right| < \varepsilon$$

が成立つ。故に $\|\xi\|_{C^1([t_0,t_1];\ \mathscr{H})} < \eta(\varepsilon)$ なる任意の $\xi \in C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right)$ に対し

$$\int_{t_0}^{t_1} \left|R_{(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))}\left(\xi(t), \dot{\xi}(t)\right)\right| dt < (t_1 - t_0)\varepsilon$$

が成立つ。これが示すべき事であった。

$\mathscr{H}$ の二点の組 (q_0, q_1) を与え、それぞれ初期時刻 t_0 及び終期時刻 t_1 に於ける状態と見做し、それを実現する経路全体の成す集合を $\Gamma(t_0, q_0|t_1, q_1)$ と表し $C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right)$ のノルムで距離 d を導入しよう：

$$\begin{aligned}
&\Gamma(t_0, q_0|t_1, q_1) = \left\{\gamma \in C^1\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right);\ \gamma(t_0) = q_0,\ \gamma(t_1) = q_1\right\} \\
&d(\gamma_1.\gamma_2) = \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C^1([t_0,t_1];\ \mathscr{H})}
\end{aligned}$$

命題２． $\Gamma(t_0, q_0|t_1, q_1)$ は d で完備である。

（証明）$(\gamma_n) \subset \Gamma(t_0, q_0|t_1, q_1)$ をコーシー列とする。$C\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right)$ の完備性より $\gamma, \tilde{\gamma} \in C\left([t_0, t_1];\ \mathscr{H}\right)$ が存在して $\|\gamma_n - \gamma\|_{L^\infty(t_0,t_1;\ \mathscr{H})} \to 0$ 及び $\|\dot{\gamma}_n - \tilde{\gamma}\|_{L^\infty(t_0,t_1;\ \mathscr{H})} \to 0$ が成立つ。このとき各 $t \in [t_0, t_1]$ に対し

$$\begin{aligned}
&\left\|\gamma(t) - q_0 - \int_{t_0}^{t} \tilde{\gamma}\right\| \\
&\leq \|\gamma(t) - \gamma_n(t)\| + \left\|\gamma_n(t) - q_0 - \int_{t_0}^{t} \dot{\gamma}_n\right\| + \left\|\int_{t_0}^{t} (\dot{\gamma}_n - \tilde{\gamma})\right\| \\
&\leq \|\gamma - \gamma_n\|_{L^\infty(t_0,t_1;\ \mathscr{H})} + \int_{t_0}^{t} \|\dot{\gamma}_n - \tilde{\gamma}\| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

となるから任意の $t \in [t_0, t_1]$ に対し等式

$$\gamma(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{\gamma}$$

が成立つ。これより $\gamma \in C^1([t_0, t_1];\ \mathscr{H})$ 且つ $\dot{\gamma} = \tilde{\gamma}$ 即ち

$$\gamma(t) = q_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\gamma}$$

が従う。ここで $t=t_0$ を代入すると $\gamma(t_0)=q_0$,

$$\begin{aligned}\|\gamma(t_1)-q_1\| \le\ & \|\gamma(t_1)-\gamma_n(t_1)\|+\|\gamma_n(t_1)-q_1\| \\ =\ & \|\gamma(t_1)-\gamma_n(t_1)\| \le \|\gamma-\gamma_n\|_{L^\infty(t_0,t_1;\ \mathscr{H})} \to 0\end{aligned}$$

より $\gamma(t_1)=q_1$ を得る。故に $\gamma\in\Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)$ 且つ $d(\gamma_n,\gamma)\to 0$ が従う。

作用積分の最小化問題を定式化する為に次の数 $I_0\in[-\infty,+\infty)$ を導入しよう：

$$I_0=\inf\{I(\gamma)\in\mathbb{R};\ \gamma\in\Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)\}$$

次の二つの命題は基本的である。

命題３． $I_0=I(\gamma)\in\mathbb{R}$ なる $\gamma\in\Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)$ が在ったとすると任意の $\xi\in\Gamma(t_0,0|t_1,0)$ に対し $I'(\gamma)\xi=0$

（証明）任意の $t>0$ に対し $\gamma\pm t\xi\in\Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)$ 故 $I(\gamma\pm t\xi)\ge I_0=I(\gamma)$ となるから

$$I'(\gamma)\xi=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\left(I(\gamma+t\xi)-I(\gamma)\right)\ge 0$$

一方

$$-I'(\gamma)\xi=I'(\gamma)(-\xi)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\left(I(\gamma+t(-\xi))-I(\gamma)\right)\ge 0$$

両者共に成立すると云う条件に依り $I'(\gamma)\xi=0$ が従う。

命題４． $I_1\in[-\infty,+\infty)$ を

$$I_1=\inf\{I(\gamma)\in\mathbb{R};\ \gamma\in H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H}),\ \gamma(t_0)=q_0,\ \gamma(t_1)=q_1\}$$

と定義する。このとき

$I_1\in\mathbb{R}$ ならば $I_0\in\mathbb{R}$ となり $I_0=I_1$

（証明）定義より一般に $I_0\ge I_1$ となる。$\gamma(t_0)=q_0,\ \gamma(t_1)=q_1$ なる $\gamma\in H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ に対し $\tilde\gamma$ を

$$\tilde\gamma(t)=\gamma(t)-\left(\frac{t_1-t}{t_1-t_0}\,q_0+\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\,q_1\right),\ t\in[t_0,t_1]$$

と定義すれば $\tilde\gamma\in H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ で $\tilde\gamma(t_0)=\tilde\gamma(t_1)=0$ 即ち $\tilde\gamma\in H^1_0(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ となる。
これより $(\xi_n)\subset C^1_0\left((t_0,t_1);\ \mathscr{H}\right)$ が存在して $\|\xi_n-\tilde\gamma\|_{H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})}\to 0$ を満たす。そこで

$$\gamma_n(t)=\xi_n(t)+\left(\frac{t_1-t}{t_1-t_0}\,q_0+\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\,q_1\right),\ t\in[t_0,t_1]$$

と定義すれば $\gamma_n\in\Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)$ 且つ

$$\|\gamma_n-\gamma\|_{H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})}=\|\xi_n-\tilde\gamma\|_{H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})}\to 0$$

を満たす。$I_1 \in \mathbb{R}$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\gamma_\varepsilon(t_0) = q_0,\ \gamma_\varepsilon(t_1) = q_1$ なる $\gamma_\varepsilon \in H^1(t_0, t_1;\ \mathscr{H})$ が存在し $I(\gamma_\varepsilon) < I_1 + \varepsilon$ を満たす。このとき $(\gamma_n) \subset \Gamma(t_0, q_0|t_1, q_1)$ が存在し $\|\gamma_n - \gamma_\varepsilon\|_{H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})} \to 0$ を満たす。I の連続性より $I(\gamma_n) \to I(\gamma_\varepsilon)$ が従うが、常に $I(\gamma_n) \geq I_0$ 故 $I_0 \leq \lim_{n\to\infty} I(\gamma_n) = I(\gamma_\varepsilon) < I_1 + \varepsilon$ を得る。$\varepsilon > 0$ は任意であったので、これより $I_0 \leq I_1$ が従う。

2．基礎的不等式

この節では第 3 節で用いる基礎的不等式について纏めて置こう。

命題 5． 任意の $\gamma \in H^1(t_0, t_1;\ \mathscr{H})$ に対し次の不等式が成立つ：

$$\sup_{t\in[t_0,t_1]} \|\gamma(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|\gamma(t_0)\|^2 + \|\gamma(t_1)\|^2\right) + \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma\|^2\right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma\|^2 \leq (t_1 - t_0)\left(\|\gamma(t_0)\|^2 + \|\gamma(t_1)\|^2\right) + (t_1 - t_0)^2 \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2 \tag{2.2}$$

（証明）各 $t \in [t_0, t_1]$ に対して成立つ二つの不等式

$$\|\gamma(t)\|^2 = \|\gamma(t_0)\|^2 + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\|\gamma(s)\|^2 ds \leq \|\gamma(t_0)\|^2 + \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d}{ds}\|\gamma(s)\|^2\right| ds$$

$$\|\gamma(t)\|^2 = \|\gamma(t_1)\|^2 - \int_{t}^{t_1} \frac{d}{ds}\|\gamma(s)\|^2 ds \leq \|\gamma(t_1)\|^2 + \int_{t}^{t_1} \left|\frac{d}{ds}\|\gamma(s)\|^2\right| ds$$

の両辺を加えて半分にすると

$$\|\gamma(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|\gamma(t_0)\|^2 + \|\gamma(t_1)\|^2\right) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left|\frac{d}{ds}\|\gamma(s)\|^2\right| ds$$

が従う。最後の被積分函数を

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d}{ds}\|\gamma(s)\|^2\right| = |(\gamma(s)|\dot{\gamma}(s))| \leq \|\gamma(s)\|\,\|\dot{\gamma}(s)\|$$

と評価し、コーシー・シュワルツの不等式を用いれば (2.1) が従う。更に

$$\begin{aligned}\|\gamma(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2}\left(\|\gamma(t_0)\|^2 + \|\gamma(t_1)\|^2\right) + \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma\|^2\right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|\gamma(t_0)\|^2 + \|\gamma(t_1)\|^2\right) + \frac{1}{2(t_1 - t_0)}\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma\|^2 + \frac{t_1 - t_0}{2}\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2\end{aligned}$$

の両辺を t で $[t_0, t_1]$ 上で積分すれば (2.2) が従う。

命題５の証明は簡単であるが、最良評価ではない。もう少し工夫したものが次の評価である。

命題６．　任意の $\gamma \in H^1(t_0, t_1;\ \mathscr{H})$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対し次の不等式が成立つ：

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma\|^2 \le \left(\frac{t_1 - t_0}{\pi}\right)^2 (1+\varepsilon) \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma\|^2 + (t_1 - t_0)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) (\|\gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_1)\|)^2 \tag{2.3}$$

（証明）**第１段　$\boldsymbol{\gamma \in H_0^1(0, \pi;\ \mathscr{H})}$ に対し不等式**

$$\int_0^\pi \|\gamma\|^2 \le \int_0^\pi \|\dot\gamma\|^2$$

が成立つ事：稠密性に拠り $\gamma \in C_0^1(0, \pi;\ \mathscr{H})$ に対して示せば充分である。

（証明その１）等式

$$\sin t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin t}\ \gamma\right) = \dot\gamma - \frac{\cos t}{\sin t}\ \gamma$$

より

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin t}\ \gamma\right)\right\|^2 \sin^2 t = \|\dot\gamma\|^2 - 2\frac{\cos t}{\sin t}(\dot\gamma|\gamma) + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\|\gamma\|^2 \\
&= \|\dot\gamma\|^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\|\gamma\|^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)\|\gamma\|^2 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\|\gamma\|^2 \\
&= \|\dot\gamma\|^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\|\gamma\|^2\right) - \|\gamma\|^2
\end{aligned}$$

を得るので $[0, \pi]$ 上で積分すると

$$\int_0^\pi (\|\dot\gamma\|^2 - \|\gamma\|^2) = \int_0^\pi \left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin t}\ \gamma\right)\right\|^2 \sin^2 t\ dt \ge 0$$

が従う。

（証明その２）$t \in [-\pi, 0]$ に対し $\gamma(t) = -\gamma(-t)$ と定義し γ を $[-\pi, \pi]$ 上の奇函数として拡張して考える。γ をフーリエ級数展開し

$$\gamma(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$$

と表す。ここに $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z}; \mathscr{H})$ は具体的に

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \gamma(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

で与えられ、特に $a_0 = 0$ である。パーセバルの等式を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \|\dot\gamma(t)\|^2 dt &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \|\dot\gamma(t)\|^2 dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\|a_n\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^2\|a_n\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \|a_n\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \|\gamma(t)\|^2 dt = \int_0^\pi \|\gamma(t)\|^2 dt\end{aligned}$$

が従う。

第２段　$\boldsymbol{\gamma \in H_0^1(t_0, t_1;\ \mathscr{H})}$ に対し不等式

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma\|^2 \leq \left(\frac{t_1 - t_0}{\pi}\right)^2 \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma\|^2$$

が成立つ事： $\gamma \in H_0^1(t_0, t_1;\ \mathscr{H})$ に対し $\gamma_0(t) = \gamma\left(\frac{t_1 - t_0}{\pi}\ t + t_0\right),\ t \in [0, \pi]$ と置くと $\gamma_0 \in H_0^1(0, \pi;\ \mathscr{H})$ であり

$$\int_0^\pi \|\gamma_0\|^2 = \int_0^\pi \left\|\gamma\left(\frac{t_1 - t_0}{\pi}\ t + t_0\right)\right\|^2 dt = \frac{\pi}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma\|^2$$

及び

$$\int_0^\pi \|\dot\gamma_0\|^2 = \left(\frac{t_1 - t_0}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi \left\|\dot\gamma\left(\frac{t_1 - t_0}{\pi}\ t + t_0\right)\right\|^2 dt = \frac{t_1 - t_0}{\pi}\int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma\|^2$$

が成立つので γ_0 に対し第１段を適用すれば良い。

第３段　$\boldsymbol{\gamma \in H^1(t_0, t_1;\ \mathscr{H})}$ に対する (2.3) の証明

q_0 と q_1 とを結ぶ直線 $l : [t_0, t_1] \to \mathscr{H}$ を

$$l(t) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0}\ q_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\ q_1,\ t \in [t_0, t_1]$$

で定める。ここに $q_0 = \gamma(t_0),\ q_1 = \gamma(t_1)$ である。このとき $\gamma - l \in H_0^1(t_1, t_2;\ \mathscr{H})$ であり

$$\begin{aligned}(\int_{t_0}^{t_1} \|l\|^2)^{1/2} &\leq \frac{1}{t_1 - t_0}\ (\int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2 dt)^{1/2}\ \|q_0\| + \frac{1}{t_1 - t_0}\ (\int_{t_0}^{t_1} (t - t_0)^2 dt)^{1/2}\ \|q_1\| \\ &= (t_1 - t_0)^{1/2}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ (\|q_0\| + \|q_1\|)\end{aligned}$$

及び

$$(\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{l}\|^2)^{1/2} = (t_1 - t_0)^{-1/2}\ \|q_1 - q_0\| \le (t_1 - t_0)^{-1/2}\ (\|q_0\| + \|q_1\|)$$

であるから第２段を $\gamma - l$ に適用し

$$\begin{aligned}
(\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma\|^2)^{1/2} &\le (\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma - l\|^2)^{1/2} + (\int_{t_0}^{t_1} \|l\|^2)^{1/2} \\
&\le \frac{t_1 - t_0}{\pi}\ (\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma} - \dot{l}\|^2)^{1/2} + (\int_{t_0}^{t_1} \|l\|^2)^{1/2} \\
&\le \frac{t_1 - t_0}{\pi}\ (\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2)^{1/2} + \frac{t_1 - t_0}{\pi}\ (\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{l}\|^2)^{1/2} + (\int_{t_0}^{t_1} \|l\|^2)^{1/2} \\
&\le \frac{t_1 - t_0}{\pi}\ (\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2)^{1/2} + \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(t_1 - t_0)^{1/2}\ (\|q_0\| + \|q_1\|) \\
&\le \frac{t_1 - t_0}{\pi}\ (\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2)^{1/2} + (t_1 - t_0)^{1/2}\ (\|q_0\| + \|q_1\|)
\end{aligned}$$

を得る。これより (2.3) が直ちに従う。

３．古典模型の場合

この節では古典力学に現れるラグランジュ函数として

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(x),\ (x, v) \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$$

を取り上げる。ここに V は $V \in C^1(\mathscr{H}; \mathbb{R})$ であり次の**強圧条件** (C) coerciveness condition を満たすものと仮定する：

(C)　$c_0 > 0$ 及び (q_0, q_1) のノルムにのみ依存する定数 $C_0 = C_0(\|q_0\|, \|q_1\|) > 0$ が存在し、任意の $\gamma \in \Gamma(t_0, q_0 | t_1, q_1)$ に対し次の不等式が成立つ：

$$c_0 \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2 \le \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}) + C_0$$

このとき V は

$$\text{(C}'\text{)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} V(\gamma) \le \left(\frac{1}{2} - c_0\right) \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}\|^2 + C_0$$

と評価され、ポテンシャルエネルギーが運動エネルギーで統御される様子が記述される。さて $L \in C^1(\mathscr{H} \times \mathscr{H}; \mathbb{R})$ の偏微分係数は

$$\begin{aligned}
\partial_1 L(x, v) &= -V'(x) \in B(\mathscr{H}; \mathbb{R}) = \mathscr{H}', \\
\partial_2 L(x, v) &= (v|\cdot) \in B(\mathscr{H}; \mathbb{R}) = \mathscr{H}'
\end{aligned}$$

と計算されるが、リース対応 $\iota \in B(\mathscr{H}'; \mathscr{H})$

$$\ell(v) = (\iota(\ell)|v),\ \ \ell \in \mathscr{H}',\ v \in \mathscr{H}$$

を取って

$$v = \iota\left(\partial_2 L(x,v)\right),\ \mathrm{grad}\ V(x) = \iota\left(V'(x)\right) = -\iota\left(\partial_2 L(x,v)\right)$$

とすれば、任意の $u \in \mathscr{H}$ に対し、等式

$$\begin{aligned}\partial_1 L(x,v)u &= -V'(x)u = -\left(\mathrm{grad}\ V(x)|u\right)\\ \partial_2 L(x,v)u &= (v|u)\end{aligned}$$

を得る事になる。

定理１． $V \in C^1(\mathscr{H};\mathbb{R})$ は (C) を満たすとし、ラグランジュ函数 L を

$$L(x,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(x),\ (x,v) \in \mathscr{H}\times\mathscr{H}$$

で定義する。このとき $\gamma \in \Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)$ が存在し

$$I(\gamma) = \inf\{I(\gamma) \in \mathbb{R};\ \gamma \in \Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)\}$$

を満たす。更に $\gamma \in C^2\left([t_0,t_1];\ \mathscr{H}\right)$ であり、方程式

$$\begin{cases}\ddot{\gamma}(t) = -\mathrm{grad}\ V\left(\gamma(t)\right),\ t \in [t_0,t_1]\\ \gamma(t_0) = q_0,\ \gamma(t_1) = q_1\end{cases}$$

を満たす。

(証明) 条件 (C) より任意の $\gamma \in \Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)$ に対し

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\gamma,\dot{\gamma}) \geq -C_0$$

が成立つので I_0 は実数として定まる。命題４の議論から I_1 も実数として定まり $I_0 = I_1$ となる。$(\gamma_n) \subset \Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)$ が存在し $I(\gamma_n) \to I_0$ を満たす。条件 (C) より

$$\sup_{n\geq 1}\int_{t_0}^{t_1}\|\dot{\gamma}_n\|^2 \leq \frac{1}{c_0}\left(\sup_{n\geq 1} I(\gamma_n) + C_0\right) =: M_1^2$$

命題５より

$$\begin{aligned}&\sup_{n\geq 1}\int_{t_0}^{t_1}\|\gamma_n\|^2 \leq (t_1-t_0)\left(\|q_0\|^2+\|q_1\|^2\right) + (t_1-t_0)^2 M_1^2 =: M_0^2,\\ &\sup_{n\geq 1}\|\gamma_n\|^2_{L^\infty(t_0,t_1;\ \mathscr{H})} \leq \frac{1}{2}\left(\|q_0\|^2+\|q_1\|^2\right) + M_0 M_1\end{aligned}$$

が従う。更に任意の $t,s \in [t_0,t_1]$ に対し

$$\begin{aligned}\|\gamma_n(t)-\gamma_n(s)\| &= \left\|\int_s^t \dot{\gamma}_n\right\|\\ &\leq \left|\int_s^t \|\dot{\gamma}_n\|\right| \leq |t-s|^{1/2}\left(\int_{t_0}^{t_1}\|\dot{\gamma}_n\|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

が成立つので

$$\sup_{n\geq 1}\|\gamma_n(t)-\gamma_n(s)\| \leq M_1|t-s|$$

が得られる。以上より (γ_n) はヒルベルト空間 $H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ に於ける有界列であり $C([t_0,t_1];\ \mathscr{H})$ に於ける等連続一様有界列を成す。ヒルベルト空間の有界閉集合の弱点列コンパクト性及びアスコリ・アルツェラの定理により、(γ_n) の部分列 (γ_{n_j}) 及び $\gamma_0 \in H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})\cap C^{1/2}([t_0,t_1];\ \mathscr{H})$ が存在して (γ_{n_j}) は γ_0 に $H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ で弱収束し且つ $L^\infty(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ で収束する。このとき任意の $\xi\in L^2(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ に対し

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}(\gamma_0(t)-q_0-\int_{t_0}^{t}\dot{\gamma}_0|\xi(t))dt\\ =&\lim_{j\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}(\gamma_{n_j}(t)-q_0-\int_{t_0}^{t}\dot{\gamma}_{n_j}|\xi(t))dt=0\end{aligned}$$

となる。実際、各 $t\in[t_0,t_1]$ に対し定値函数 $\xi(t)\in\mathscr{H}$ は $L^2(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ の元であり $[t_0,t]$ は $[t_0,t_1]$ の部分集合であるから

$$\begin{aligned}(\int_{t_0}^{t}\dot{\gamma}_{n_j}|\xi(t)) &= \int_{t_0}^{t}\big(\dot{\gamma}_{n_j}|\xi(t)\big)=\big(\dot{\gamma}_{n_j}|\xi(t)\big)_{L^2(t_0,t;\ \mathscr{H})}\\ \to(\dot{\gamma}_0|\xi(t))_{L^2(t_0,t;\ \mathscr{H})} &= (\int_{t_0}^{t}\dot{\gamma}_0|\xi(t))\end{aligned}$$

となり

$$\left|(\int_{t_0}^{t}\dot{\gamma}_{n_j}|\xi(t))\right| \leq \left(\sup_{n\geq 1}\int_{t_0}^{t_1}\|\dot{\gamma}_{n_j}\|^2\right)^{1/2}|t_1-t_0|^{1/2}\|\xi(t)\| \leq M_1|t_1-t_0|^{1/2}\|\xi(t)\|$$

と一様評価されるので、有界収束定理より上記収束が従う。

$\xi\in L^2(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ は任意だったので各 $t\in[t_0,t_1]$ に対し

$$\gamma_0(t)=q_0+\int_{t_0}^{t}\dot{\gamma}_0$$

が従う。特に

$$\gamma_0(t_1)=q_0+\int_{t_0}^{t_1}\dot{\gamma}_0$$

となるが、右辺は任意の $u\in\mathscr{H}$ $(\subset L^2(t_0,t_1;\ \mathscr{H}))$ に対して

$$\begin{aligned}(q_0+\int_{t_0}^{t_1}\dot{\gamma}_0|u) &= (q_0|u)+(\dot{\gamma}_0|u)_{L^2(t_0,t_1;\ \mathscr{H})}\\ &= (q_0|u)+\lim_{j\to\infty}(\dot{\gamma}_{n_j}|u)_{L^2(t_0,t_1;\ \mathscr{H})}\\ &= \lim_{j\to\infty}(q_0+\int_{t_0}^{t_1}\dot{\gamma}_{n_j}|u)\\ &= (q_1|u)\end{aligned}$$

となる事から q_1 に等しいので

$$\gamma_0(t_1)=q_0+\int_{t_0}^{t_1}\dot{\gamma}_0=q_1$$

が従う。

さて $(\dot\gamma_{n_j})$ は $\dot\gamma_0$ に $L^2(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ で弱収束するので、対応する評価

$$\int_{t_0}^{t_1}\|\dot\gamma_0\|^2 \le \liminf_{j\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\|\dot\gamma_{n_j}\|^2$$

を得る。一方、各 $t\in[t_0,t_1]$ に対し $V\left(\gamma_{n_j}(t)\right)\to V\left(\gamma_0(t)\right)$ となり (γ_{n_j}) は $L^\infty(t_0,t_1;\ \mathscr{H})$ に於ける有界列であるから $(V\circ\gamma_{n_j})$ は $L^\infty(t_0,t_1;\ \mathbb{R})$ に於ける有界列を成す。故に有界収束定理より

$$\lim_{j\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}V(\gamma_{n_j})=\int_{t_0}^{t_1}V(\gamma_0)$$

を得る。従って

$$\begin{aligned}
I_0=I_1\le\int_{t_0}^{t_1}L(\gamma_0,\dot\gamma_1)&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\|\dot\gamma_0\|^2-V(\gamma_0)\right)\\
&=\liminf_{j\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\|\dot\gamma_{n_j}\|^2-\lim_{j\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}V(\gamma_{n_j})\\
&=\liminf_{j\to\infty}\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\|\dot\gamma_{n_j}\|^2-V(\gamma_{n_j})\right)\\
&=\liminf_{j\to\infty}I(\gamma_{n_j})=I_0
\end{aligned}$$

より $I(\gamma_0)=I_0$ を得る。このとき命題 1 及び命題 3 より $H^{-1}(t_0,t_1;\ \mathscr{H})=(H^1(t_0,t_1;\ \mathscr{H}))'$ に於ける等式

$$\ddot\gamma_0=-\mathrm{grad}\ V(\gamma_0)$$

が成立つ。$V\in C^1(\mathscr{H};\mathbb{R})$ 及び $\gamma\in C([t_0,t_1];\ \mathscr{H})$ より $V'\circ\gamma\in C([t_0,t_1];\ \mathscr{H}')$ が従うので $\mathrm{grad}\ V(\gamma_0)\in C([t_0,t_1];\ \mathscr{H})$ となり $\gamma_0\in C^2([t_0,t_1];\ \mathscr{H})$ 特に $\gamma_0\in\Gamma(t_0,q_0|t_1,q_1)$ となる事が分かる。

４．最小化経路の積分表示

第 3 節の定理 1 に拠り、強圧条件 (C) の下でその存在が証明された最小化経路 γ が満たすニュートンの運動方程式の解の表示公式を求めよう。最小化経路 $\gamma\in C^2([t_0,t_1];\ \mathscr{H})$ はニュートンの運動方程式としての常微分方程式

(N) $\quad \ddot\gamma(t)=-\mathrm{grad}\ V(\gamma(t)),\ t\in[t_0,t_1]$

及び境界条件

$$\gamma(t_0)=q_0,\ \gamma(t_1)=q_1$$

を満たす。ここに t_0 及び t_1 は $t_0<t_1$ を満たす初期時刻及び終期時刻であり q_0 及び q_1 は初期状態及び終期状態である。方程式 (N) を $[t_0,t]$ で積分し

$$\dot\gamma(t)=\dot\gamma(t_0)-\int_{t_0}^{t}\mathrm{grad}\ V(\gamma) \tag{4.1}$$

を得るので $\gamma(t)$ は

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \gamma(t_1) + \int_{t_1}^{t} \dot{\gamma} \\ &= q_1 + \dot{\gamma}(t_0)(t-t_1) - \int_{t_1}^{t} \left(\int_{t_0}^{s} \mathrm{grad}\ V(\gamma) \right) ds\end{aligned}$$

を満たす。$t = t_0$ を代入し

$$q_0 = q_1 - \dot{\gamma}(t_0)(t_1-t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{s} \mathrm{grad}\ V(\gamma) \right) ds$$

を得るので

$$\dot{\gamma}(t_0) = \frac{1}{t_1-t_0} \left(q_1 - q_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{s} \mathrm{grad}\ V(\gamma) \right) ds \right) \tag{4.2}$$

が成立つ。(4.1) 及び (4.2) より

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{t_1-t_0}\ (q_1-q_0) + \frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{s} \mathrm{grad}\ V(\gamma) \right) ds - \int_{t_0}^{t} \mathrm{grad}\ V(\gamma)$$

を得るので

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= q_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\gamma} \\ &= q_0 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\ (q_1-q_0) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{s} \mathrm{grad}\ V(\gamma) \right) ds - \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{s} \mathrm{grad}\ V(\gamma) \right) ds \\ &= \frac{t_1-t}{t_1-t_0}\ q_0 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\ q_1 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\tau}^{t_1} \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) ds \right) d\tau \\ &\quad - \int_{t_0}^{t} \left(\int_{\tau}^{t} \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) ds \right) d\tau \\ &= \frac{t_1-t}{t_1-t_0}\ q_0 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\ q_1 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} (t_1-\tau)\ \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) d\tau \\ &\quad - \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\ \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) d\tau \\ &= \frac{t_1-t}{t_1-t_0}\ q_0 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\ q_1 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0} \int_{t}^{t_1} (t_1-\tau)\ \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(t_1-\tau) - (t-\tau) \right)\ \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) d\tau \\ &= \frac{t_1-t}{t_1-t_0}\ q_0 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\ q_1 + \int_{t}^{t_1} \frac{t-t_0}{t_1-t_0}(t_1-\tau)\ \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \frac{t_1-t}{t_1-t_0}(\tau-t_0)\ \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) d\tau \\ &= \frac{t_1-t}{t_1-t_0}\ q_0 + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\ q_1 + \int_{t_0}^{t_1} G(t,\tau)\ \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right) d\tau\end{aligned}$$

が成立つ。ここに

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{(t_1-t)(\tau-t_0)}{t_1-t_0},\ \tau\in[t_0,t]\\[2ex]\dfrac{(t_1-\tau)(t-\tau)}{t_1-t_0},\ \tau\in[t,t_1]\end{cases}$$

とする。

これを定理の形に纏めて置こう。

定理２．　ポテンシャル $V\in C^1(\mathscr{H};\mathbb{R})$ を持つニュートンの運動方程式の境界値問題

$$\text{(N)}\quad\begin{cases}\ddot\gamma(t)=-\mathrm{grad}\,V(\gamma(t)),\ t\in[t_0,t_1]\\ \gamma(t_0)=q_0,\ \gamma(t_1)=q_1\end{cases}$$

の C^2 解 $\gamma\in C^2\left([t_0,t_1];\mathscr{H}\right)$ は積分表示

$$\text{(I)}\qquad \gamma(t)=\frac{t_1-t}{t_1-t_0}\,q_0+\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\,q_1+\int_{t_0}^{t_1}G(t,\tau)\ \mathrm{grad}\ V\left(\gamma(\tau)\right)d\tau$$

を持つ。

５．具体例

最後に (C') を満たすポテンシャル V の例を与えよう。

有界なポテンシャルは (C') を $c_0=1/2,\ C_0=(t_1-t_0)\sup\{|V(x)|;\ x\in\mathscr{H}\}$ として満たしている。

非正ポテンシャル $V\le 0$ は (C') を $c_0=1/2,\ C_0=0$ として満たしている。

$V(x)=\|x\|^\theta,\ x\in\mathscr{H},$ で与えられるポテンシャル V は $\theta>1$ の場合 C^1 級となる。更に $1<\theta<2$ の場合は命題５により

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}V(\gamma)&=\int_{t_0}^{t_1}\|\gamma(t)\|^\theta dt\\
&\le(t_1-t_0)^{1-\theta/2}\left(\int_{t_0}^{t_1}\|\gamma(t)\|^2dt\right)^{\theta/2}\\
&\le(t_1-t_0)^{1-\theta/2}\left((t_1-t_0)(\|q_0\|^2+\|q_1\|^2)+(t_1-t_0)^2\int_{t_0}^{t_1}\|\dot\gamma\|^2\right)^{\theta/2}\\
&\le\frac{\theta}{2}\varepsilon^{1-\theta/2}\left((t_1-t_0)(\|q_0\|^2+\|q_1\|^2)+(t_1-t_0)^2\int_{t_0}^{t_1}\|\dot\gamma\|^2\right)\\
&\quad+\left(1-\frac{\theta}{2}\right)\varepsilon^{-\theta/2}(t_1-t_0)\end{aligned}$$

となるので $\varepsilon>0$ を $\theta(t_1-t_0)^2\varepsilon^{1-\theta/2}<1$ なるように小さく取ると

$$c_0=\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2}(t_1-t_0)^2\varepsilon^{1-\theta/2}>0,\ C_0=(t_1-t_0)\varepsilon^{-\theta/2}\left(\frac{\theta}{2}(\|q_0\|^2+\|q_1\|^2)+\left(1-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

として (C') が成立つ。

$V(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2$ の場合は $t_1 - t_0 < \pi$ なる条件を課せば $\left(\dfrac{t_1 - t_0}{\pi}\right)^2 (1+\varepsilon) < 1$ なる $\varepsilon > 0$ を取る事に依り命題 6 を用いて $c_0 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{t_1 - t_0}{\pi}\right)^2 (1+\varepsilon)\right) > 0,$
$C_0 = (t_1 - t_0)\left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon}\right)(\|q_0\|^2 + \|q_1\|^2)$ として (C') が成立つ。但し、この場合は

$$\gamma(t) = \cos(t - t_0)q_0 + \frac{\sin(t - t_0)}{\sin(t_1 - t_0)}(q_1 - \cos(t_1 - t_0)q_0)$$

で与えられる γ が

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}(t) = -\gamma(t),\ t \in [t_0, t_1] \\ \gamma(t_0) = q_0,\ \gamma(t_1) = q_1 \end{cases}$$

の一意的な解である。この解の表示は $0 < t_1 - t_0 < \pi$ なる条件を置いて初めて意味を持つ。$t_1 - t_0 = \pi$ の場合の解の具体的表示は任意の $q \in \mathscr{H}$ に対し

$$\gamma_q(t) = \cos(t - t_0)q_0 + \sin(t - t_0)q, \quad t \in [t_0, t_1]$$

となるが、終期条件 $\gamma_q(t_1) = \gamma_q(t_0 + \pi) = q_1$ は $q_1 = -q_0$ の場合にのみ達成され、それ以外では成立しない。更に q は任意故、一意性は成立しない。即ち $t_1 - t_0 < \pi$ なる条件は最良である。

参考文献：

H. Brezis, "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations," Springer

大関 信雄, 青柳 雅計, 『不等式』, 槙書店